**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3ο ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ**

**ΘΕΜΑ Α**

Α1.Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x0$\in Af$τότε είναι και συνεχής στο x0

A2. α) Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

β) Να γράψετε τον ορισμό για το σημείο καμπής μιας συνάρτησης

Α3. Να σημειώσετε Σωστό – Λάθος

α) Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ τότε η f ΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

β) Ισχύει $ ln\left|x\right|=-\frac{1}{x}$ *, x*$\ne $*0*

γ) Αν f΄(x0)=0 με x0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x0

δ) Ισχύει ότι $\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}$

ε) Αν  όπου Αf=(-$\infty ,x\_{0})∪(x\_{0,}+\infty )$ τότε η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο την x=x0

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση f(x)=1-x+εφx με x$\ne κπ+$ $\frac{π}{2}$ κ$\in Ζ$

Β1. Να δείξετε ότι η f(x)=0 έχει μοναδική αρνητική ρίζα στο $\left(-\frac{π}{2},0\right)$

Β2. Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου ο οποίος εφάπτεται στην Cf στο *x0 =*$ \frac{π}{4}$ και στο ίδιο σημείο ο ρυθμός μεταβολής του ρυθμού της είναι ίδιος.

Να εκφράσετε με μιγαδικούς τη σχέση που ισχύει για τον κύκλο

Β3. Αν $x\in \left[0,^{π}/\_{4}\right]$ να αποδείξετε ότι *εφx* $\geq $*2x+1-* $\frac{π}{2}$

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η μη σταθερή συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο x0 με f ΄(0)=3 για την οποία ισχύουν: $f\left(x+y\right)=f(x)∙f\left(y\right)e^{3xy(x+y)}$ για κάθε $x,y\in R$. Αποδείξτε ότι

Γ1. f(0)=1 και $f΄\left(x\right)=3f\left(x\right)(x^{2}+1)$ για κάθε $x\in R$.

Γ2. Η συνάρτηση $g\left(x\right)=$ $\frac{f(x)}{e^{x^{3+3x}}}$ είναι σταθερή στο *R.*

Γ3. Να βρεθεί ο τύπος της *f*.

Γ4. Να αποδείξετε ότι η F αντιστρέφεται και αν η *f -1* είναι παραγωγίσιμη να βρεθεί η εφαπτομένη της *Cf-1*  στο *x0=1* όπου *Df -1 = R*

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η $f\_{0}\left(x\right)=$ $\frac{1}{1+x^{2}}$

Δ1. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της Cf με την ευθεία y=α, $α\in R$

Δ2. Έστω $f\_{n+1}(x)$= $\frac{df\_{n}(x)}{d\_{x}}$ με n=0,1,2,…..

α) Για n ≥ 1 να αποδείξετε ότι $\left(1+x^{2}\right)f\_{n+1}\left(x\right)+2\left(n+1\right)xf\_{n}\left(x\right)+n\left(n+1\right)f\_{n-1}\left(x\right)=0$

β) Δίνεται η $P\_{n}(x)$ με n=0,1,2,….. ώστε $P\_{n}\left(x\right)=(1+x^{2})^{n+1}f\_{n}(x)$

i. βρείτε τα $P\_{0}(x)$ ,$ P\_{1}\left(x\right), P\_{2}(x)$

ii. αποδείξτε ότι για n ≥ 0 ισχύει $P\_{n+1}\left(x\right)-(1+x^{2})$ $\frac{dP\_{n}(x)}{dx}$ + $2\left(n+1\right)xP\_{n}\left(x\right)=0$ και ότι το $P\_{n}\left(x\right)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n.